

Tentamen van Lineaire Algebra, 27 juni 2003, 8:30-11:30 uur

Schrijf je naam + student nummer op ieder vel. Bij elke vraag wordt argumentatie verwacht.

Opgave 1: Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -6 & 18 \\ 5 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

- Vind de rang van A .
- Geef de volledige oplossing van: $Ax = (1, -1, 8, 3)^t$.
- De transformatie T heeft als matrixvoorstelling $B = A^t \cdot A \cdot A^t$. Is T surjectief en/of injectief?

Opgave 2: Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

- Vind de algemene oplossing.
- Laat $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ met het inproduct $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ zijn. Vind een orthogonale basis van de in a) gevonden ruimte van oplossingen.
- Vind de oplossing van $y'' - 4y' + 3y = e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5/2$.

Opgave 3: Neem $V = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en laat $T : V \rightarrow V$ de transformatie zijn gedefinieerd door

$$(Tf)(x) = f''(x) + 4f(x).$$

- Toon aan dat T lineair is.
- Beschrijf de eigenruimte E_0 van T ?
- Laat zien dat $P_3(\mathbb{R})$, de polynomen van graad ≤ 3 , een T -invariante deelruimte zijn van V .
- Kies een basis van $P_3(\mathbb{R})$ en stel de matrixvoorstelling van T op ten opzichte van deze basis.
- Welke eigenwaarden en eigenvectoren heeft T op $P_3(\mathbb{R})$?

Opgave 4: Een zekere B.S. te R. heeft een computervirus gemaakt en verspreidt dit per email onder zijn landgenoten. Deze landgenoten zijn slim (en dan vernietigen ze het virus meteen), of dom (en dan sturen ze het door aan 10 nieuwe landgenoten) of zeer dom (en die sturen het virus door naar 50 nieuwe landgenoten). Domme en zeer domme mensen versturen hun virus maar één keer; daarna vinden ze het virus en vernietigen het. Neem aan dat elke virusmail naar een nieuw persoon gaat, en dat niemand dezelfde virusmail van twee of meer kanten krijgt.

Van elke zending gaat 70% naar slimme, 20% naar domme en 10% naar zeer domme personen. Iedereen heeft maar één emailsessie per dag. Op dag 0 stuurt B.S. de eerste mail naar B.B. die hij kent als zeer dom persoon.

- Stel een model op (met overgangsmatrix) van dit proces.
- Met welke factor neemt asymptotisch het aantal virussen toe per zending, en welk (asymptotische) percentage van de verzonden virussen komt van slimme, domme resp. zeer domme mensen?
- Na hoeveel tijd zijn er meer dan drie miljoen virussen in omloop?